学校编号：10384　　分类号：＿＿＿＿密级：＿＿＿＿
学　　号：19020071152102　　UDC：＿＿＿＿

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

有限群的弱 $S-$ 可补子群

On Weakly S-supplemented Subgroups of Finite Groups

肖　碧　生

指导教师姓名：杜　妮　副教授
专 业 名 称：基　础　数　学

论文提交日期：2010 年 5 月
论文答辩日期：2010 年　月
学位授予日期：2010 年　月

答辩委员会主席：＿＿＿＿
评　阅　人：＿＿＿＿

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

责任人（签名）：

年 月 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（　），在　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（　）。

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名：　　　　　　日期：　　年　月　日

导师签名：　　　　　　日期：　　年　月　日

目　　录

中文摘要 I

英文摘要 II

第一章　引言 1

第二章　预备知识 5

第三章　主要结果 9

参考文献 18

致谢 21

Contents

Abstract (in Chinese) I

Abstract (in English) II

Chapter I Introduction 1

Chapter II Preliminaries 5

Chapter III Main Results 9

References 18

Acknowledgments 21

摘　要

群 G 的子群 H 称为在 G 中是弱 S- 可补的，如果 G 有子群 T，使得 $G = HT$ 且 $H \bigcap T \leq H_{SG}$. 这里 H_{SG} 是包含在 H 中的 G 的最大的 S- 拟正规子群. 本文讨论了子群的弱 S- 可补性质对群结构的影响.

关键词：有限群；群系；幂零群；弱 S- 可补子群.

Abstract

A subgroup H of a group G is said to be weakly $S-$supplemented in G if H has a supplement T in G such that $G = HT$ and $H \cap T \leq H_{SG}$, where H_{SG} is the largest $S-$quasinormal subgroup of G contained in H.In this paper,we investigate the influence of weakly $S-$supplemented subgroups on the structure of finite groups.

Key words: finite group; formations; nilpotent group; weakly $S-$supplemented subgroups .

第一章 引言

群论研究的主要任务是研究各种群的性质和结构，每给出一种未知的群的结构，无论对于丰富群的理论还是对于相关的理论学科和应用学科都是十分有价值的工作.

研究有限群的一个重要方法就是通过对群的部分子群附加或限制一定的条件，来刻画整个群的结构. 例如著名的 Frobenius 定理、Burnside 定理、Glauberman 定理等都是利用子群的性质来研究有限群的结构. 借助于 *Sylow* 2- 子群, Brauer,Walter,Gore-nstein,Gilman,Janko,Mazurov,Sciskin 以及其他许多数学家用它来刻划单群. 同样，准素子群和它的正规化子还导致了群分析的局部理论，该理论成为单群分类理论的基础.

在研究非单群，特别是在研究可解群中，人们通常考虑的是极大子群、极小子群、 *Fitting* 子群、 *Sylow* 子群以及 *Sylow* 对象等. 例如，早在 1954 年， B.Huppert 就成功地用 " G 的一切极大子群具有素数指数", 这一条件刻画出了超可解群. 1955 年， N.Ito 利用极小子群刻画幂零群，给出著名的 Ito 定理 [1]: 设 G 是奇数阶群，(1) 若 G 的每个极小子群含于 $Z(G)$ 中，则 G 是幂零的. (2) 若 G' 的每个极小子群正规于 G ，则换位子群 G' 是幂零的且 G 是可解的.

近几年来，许多学者考虑削弱子群的正规性的条件得到更为一般的子群，再用这些子群来刻画群的性质. 例如： 1939 年， Ore 在文献 [8] 中提出了拟正规子群 (*quasinormal subgroup*) 的概念：

定义 1.1 设 $H \leq G$ ，若对 $\forall K \leq G$ ，均有 $HK \leq G$ ，则称 H 为 G 的拟正规子群.

显然 H 为 G 的拟正规子群当且仅当 $HK = KH$ ， $\forall K \leq G$ ，故拟正规子群又被称为置换子群 (*permutable subgroup*)[9].

1962 年， Kegel 在文 [10] 中将拟正规子群推广为 $S-$ 拟正规子群.

定义 1.2 称群 G 的子群 H 在 G 中是 S- 拟正规子群，如果 H 置换 G 的每个 *Sylow* 子群.

定理 1.3 [10] 若群 G 的极小子群及 4 阶循环子群均在 G 中是 $S-$ 拟正规的，则 G 是超可解群.

作为拟正规、 $S-$ 拟正规概念的一个推广， 1987 年，陈重穆在文献 [11] 中引进了半正规、 $S-$ 半正规子群的概念.

定义 1.4 [11] 群 G 的一个子群 H 称为半正规的，若对任意的 $K \leq G$, 只要 $(|K|, |H|)$=1, 就有 $KH = HK$.

定义 1.5 [11] 群 G 的一个子群 H 称为 $S-$ 半正规的，若对任意的 $p \in \pi(G)$, 只要 $(p, |H|)$=1 ，就有 $PH = HP$, 其中 $P \in Syl_p(G)$.

张勤海在文献 [12] 中分别称半正规子群、 $S-$ 半正规子群为半置换子群、 $S-$ 半置换子群，并利用 $S-$ 半置换子群得到了一系列的结果．如：

定理 1.6 [13] 设 $\mathscr{F}$ 为包含 $\mathscr{U}$ 的饱和群系，则下列条件等价：

(1)$G \in \mathscr{F}$;

(2) 存在 G 的正规子群 H ，使得 $G/H \in \mathscr{F}$ ，且 H 的 $Sylow$ 子群的极大子群均在 G 中是半正规的；

(3) 存在 G 的正规子群 H ，使得 $G/H \in \mathscr{F}$ ，且 H 的 $Sylow$ 子群的极大子群均在 G 中是 $S-$ 半置换的.

1996 年，王燕鸣在文献 [14] 中提出了 $C-$ 正规子群的概念.

定义 1.7 称 H 为 G 的一个 $C-$ 正规子群，如果存在 $K \trianglelefteq G$ ，使得 $G = HK$ 且 $H \bigcap K \leq H_G$ ，其中 H_G 是包含在 H 中 G 的最大正规子群.

在 [14] 中，利用 $C-$ 正规子群可以得到许多关于群结构的刻画，例如：

定理 1.8 [14] 若群 G 的每个 $Sylow$ 子群的极大子群在 G 中是 $C-$ 正规的，则 G 是超可解群.

有反例表明 $C-$ 正规不一定能代替 $S-$ 拟正规，反之亦然．这时候人们致力于将这两种类型的结论结合统一，从而推广相关结论.

定理 1.9 [15] 设 $M \trianglelefteq G$ ，且 G/M 为超可解群，若 M 的每个 $Sylow$ 子群的极大子群均在 G 中是 $S-$ 拟正规的或是 $C-$ 的正规，则 G 为超可解群.

定理 1.10 [15] 设 $N \trianglelefteq G$ ，且 G/N 为超可解．若 N 的每个素数阶和 4 阶循环子群均在 G 中是 $S-$ 拟正规的或是 $C-$ 正规的，则 G 为超可解群.

进一步， 2000 年，王燕鸣在文献 [22] 中又提出了 $C-$ 可补子群的概念.

定义 1.11 称 H 为 G 的一个 $C-$ 可补子群，如果存在 $K \leq G$, 使得 $G = HK$ 且 $H \bigcap K \leq H_G$, 其中 H_G 是包含在 H 中的 G 的最大正规子群.

并且证明了：

定理 1.12 [16] 有限群 G 是可解的当且仅当 G 的所有的 $Sylow$ 子群是 G 的 $C-$ 可补子群.

定理 1.13 [16] 若有限群 G 的所有的 $Sylow$ 子群的极大子群是 G 的 $C-$ 可补子群，则 G 是超可解群.

接下来，李样明和王燕鸣结合 $S-$ 拟正规和 $C-$ 可补，也有一些结果：

定理 1.14 [17] 设 $\mathscr{F}$ 是一个包含超可解群系 $\mathscr{U}$ 的饱和群系， G 有一个正规子群 H 使得 $G/H \in \mathscr{F}$, 则 $G \in \mathscr{F}$ 若下列之一成立：

(1)H 的每个 $Sylow$ 子群的所有极大子群在 G 中或者是 $S-$ 拟正规的或者是 $C-$ 可补的；

(2)$F^*(H)$ 的每个 $Sylow$ 子群的所有极大子群在 G 中或者是 $S-$ 拟正规的或者是 $C-$ 可补的，其中 $F^*(H)$ 是 H 的广义 $Fitting$ 子群.

2007 年， Skiba 在文献 [18] 中引入了弱 $S-$ 置换子群的概念.

定义 1.15 称 H 为 G 的一个弱 $S-$ 置换子群, 如果存在 $T \lhd\lhd G$, 使得 $G = HT$ 且 $H \bigcap T \leq H_{SG}$, 其中 H_{SG} 是包含在 H 中的 G 的最大的 $S-$ 拟正规子群.

同时 Skiba 在文献 [18] 中还提出了弱 $S-$ 可补子群的概念.

定义 1.16 称 H 为 G 的一个弱 $S-$ 可补子群，如果存在 $T \leq G$ ，使得 $G = HT$ 且 $H \bigcap T \leq H_{SG}$ ，其中 H_{SG} 是包含在 H 中的 G 的最大的 $S-$ 拟正规子群.

利用子群的弱 S- 可补的性质刻画原群，已有许多结果，例如：

定理 1.17 [22] 群 G 中有正规子群 N, 使得 G/N 为超可解群，若 $\mathscr{P}^*(N)$ 中每元在 G 中是弱 S- 可补的，则 G 为超可解群.

定理 1.18 [22] 群 G 中有正规子群 N, 使得 G/N 为幂零群，若 $\mathscr{P}_4(N)$ 中每元在 G 中是弱 S- 可补的，则 G 为幂零群当且仅当 $\mathscr{P}(N) \subseteq Z_\infty(G)$.

定理 1.19 [23] 设 $\mathscr{F}$ 是包含所有超可解群的一个饱和群系，则群 $G \in \mathscr{F}$ 的充要条件是 G 有正规子群 E 使得 $G/E \in \mathscr{F}$ 且 E 的每个非循环 $Sylow$ 子群的在 G 中没有 $\mathscr{U}$- 补充的素数阶循环子群或 4 阶循环子群 (若 E 的 $Sylow$-2 子群是非交换的) 在 G 中是弱 S- 可补的.

本文对子群的 S- 可补的性质进一步研究，得到以下结果：

定理 3.1 若 $p \in \pi(G)$,$(|G|, p-1) = 1$,$G_p \in Syl_p(G)$, 则 G 为 p- 幂零群当且仅当 $G_p \bigcap G^{\mathscr{N}_p}$ 中的每个 p 阶元和 4 阶元在 G 中是弱 S- 可补的.

定理 3.2 若 $\mathscr{P}_4(F^*(G^{\mathscr{N}}))$ 中每元在 G 中是弱 S- 可补的，则 G 为幂零群当且仅当 $\mathscr{P}(F^*(G^{\mathscr{N}}) \subseteq Z_\infty(G)$.

定理 3.3 $\mathscr{F}$ 为饱和群系， $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{F}, \mathscr{P}_4(G^{\mathscr{F}})$ 中每元在 G 中是弱 S- 可补的，则 $G \in \mathscr{F}$ 当且仅当 $\mathscr{P}(G^{\mathscr{F}}) \subseteq Z_{\mathscr{F}}(G)$.

定理 3.4 $\mathscr{F}$ 为饱和群系， $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{F}$, $\mathscr{P}_4(F^*(G^{\mathscr{F}}))$ 中每元在 G 中是弱 S- 可补的，则 $G \in \mathscr{F}$ 当且仅当 $\mathscr{P}(F^*(G^{\mathscr{F}}) \subseteq Z_{\mathscr{F}}(G)$.

本文所得结果推广了许多以往的结论 (参见文献 [15],[24],[35],[36]).

需要说明的是, 本文所讨论的群均为有限群, 所使用的符号和术语都是标准的, 可参考文献 [1]. 此外，我们还定义了下例符号：

$\pi(G)$: 表示群 G 的阶的不同素因子构成的集合；

$\mathscr{M}(G)$: 表示群 G 的的 Sylow 子群的极大子群构成的集合；

$\mathscr{N}_p$: 表示 p- 幂零群构成的群类；

$\mathscr{N}$: 表示幂零群构成的群类；

$\mathscr{U}$: 表示超可解群的群类；

$\mathscr{P}_p(G) = \{x | x \in G, |x| = p, p$ 是素数 $\}$;

$\mathscr{P}_4(G) = \{x | x \in G, |x| = 4\}$;

$\mathscr{P}(G) = \bigcup_{p \in \pi(G)} \mathscr{P}_p(G)$;

$\mathscr{P}^*(G) = \mathscr{P}(G) \bigcup \mathscr{P}_4(G)$.

第二章 预备知识

本章介绍一些有关定义、引理和定理，这些预备知识对于本文主要定理的证明是重要的.

定义 2.1[18] 称群 G 的子群 H 在 G 中为弱 $S-$ 可补的，若存在 $T \leq G$, 使得 $G = HT$ 且 $H \bigcap T \leq H_{SG}$, H_{SG} 表示包含在 H 中的 G 的最大 S- 拟正规子群.

引理 2.2[22] 设 U 为 G 的弱 $S-$ 可补子群， $N \trianglelefteq G$, 则:

(1) 若 $U \leq H \leq G$, 则 U 在 H 中是弱 $S-$ 可补的;

(2) 若 $N \leq U$, 则 U/N 在 G/N 中是弱 $S-$ 可补的;

(3) 设 π 是素数的集合， U 是 π- 群， N 是 π'- 群，则 UN/N 在 G/N 中是弱 $S-$ 可补的;

(4) 若存在 G 的子群 H, 使得 $U \leq \Phi(H)$, 则 U 是 G 的 S- 拟正规子群，且 $U \leq \Phi(G)$.

引理 2.3[24] 若 $p \in \pi(G)$, 且 $(|G|, p-1) = 1$, 则

(1) 若 $N \trianglelefteq G$ 且 $|N| = p$, 则 $N \leq Z(G)$;

(2) 若 G 有循环的 $Sylow$ $p-$ 子群，则 G 为 $p-$ 幂零群;

(3) 若 $M \leq G$ 且 $|G:M| = p$, 则 $M \trianglelefteq G$.

引理 2.4[25]

(1) 若 H 是 G 的 $p-$ 子群， p 为某一素数，则 H 在群 G 中是 S- 拟正规的当且仅当 $O^p(G) \leq N_G(H)$;

(2) 若 H 是 G 的 $p-$ 子群， p 为某一素数，则 $H \lhd \lhd G$ 当且仅当 $H \leq O_p(G)$;

(3) 若 H 是 G 的子群，且 H 在 G 中的指数是某一素数的方幂，则 $H \lhd \lhd G$ 当且仅当 $O^p(G) \leq H$.

引理 2.5[26, III, Theorem5.2] 设 G 是一个内幂零群，则

(1) $G = P \rtimes Q$, 其中 $P \in Syl_p(G)$, Q 为 G 的非正规循环 $Sylow$ q- 子群;

(2) $P/\Phi(P)$ 为 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群;

(3) 若 $p = 2$, 则 $expP \leqslant 4$; 若 $p > 2$, 则 $expP = p$;

(4) 当 P 交换时， $expP = p$.

引理 2.6[1, VII, Theorem4.3] 设 p'- 群 H 作用在 p- 群 G 上，令 $\Omega(G) = \Omega_1(G), p$ 为奇数时； $\Omega(G) = \Omega_2(G), p$ 为偶数时；若 H 在 $\Omega(G)$ 上作用是平凡的，则它在 G 上作

用也是平凡的.

引理 2.7 设 G 为有限群，则

(1)[27,X,13] 若 $M \trianglelefteq G$, 则 $F^*(M) \leq F^*(G)$.

(2)[27,X,13] 若 $G \neq 1$, 则 $F^*(G) \neq 1$. 事实上 $F^*(G)/F(G) = Soc(F(G)C_G(F(G))/F(G))$.

(3)[27,X,13] $F^*(F^*(G)) = F^*(G) \geq F(G)$. 若 $F^*(G)$ 可解，则 $F^*(G) = F(G)$.

(4)[27,X,13] $C_G(F^*(G)) \leq F^*(G)$.

(5)[22,lemma2.3] 设 P 为 G 的正规 p- 群，则 $F^*(G/\Phi(P)) = F^*(G)/\Phi(P)$.

(6)[22,lemma2.3] 设 $K \leq Z(G)$, 则 $F^*(G/K) = F^*(G)/K$.

(7)[22,lemma2.3] 设 $N \trianglelefteq G$, 且 $N \leq \Phi(G)$, 则 $F^*(G/N) = F^*(G)/N$.

引理 2.8[28] 设 $\mathscr{F}$ 是 S- 闭的局部群系，H 为 G 的一个子群, 那么 $H \bigcap Z_{\mathscr{F}}(G) = Z_{\mathscr{F}}(H)$, 其中 $Z_{\mathscr{F}}(G)$ 是 G 的 $\mathscr{F}$- 超中心.

引理 2.9[29,Corallary2] 设 $\mathscr{F}$ 是一个包含超可解群系的饱和群系，如果 G 有一个循环正规子群 N 使得 $G/N \in \mathscr{F}$, 则 $G \in \mathscr{F}$.

引理 2.10[30,Proposition1] 设 $\mathscr{F}$ 是一个饱和群系，有限群 G 不属于 $\mathscr{F}$, 但存在 G 的极大子群 M, 使得 $M \in \mathscr{F}$, 且 $G = MF(G)$, 则有

(1) $G^{\mathscr{F}}/\Phi(G^{\mathscr{F}})$ 为 $G/\Phi(G^{\mathscr{F}})$ 的极小正规子群.

(2) 存在素数 p, 使得 $G^{\mathscr{F}}$ 为 p- 群.

(3) $expG^{\mathscr{F}} = p, p > 2; expG^{\mathscr{F}} \leq 4, p = 2$.

(4) $G^{\mathscr{F}}$ 为初等交换群；或者 $(G^{\mathscr{F}})' = Z(G^{\mathscr{F}}) = \Phi(G^{\mathscr{F}})$ 为初等交换群.

引理 2.11[1,Theorem6.1]

(1) 对于固定的奇素数 p, 假设群 G 的一切 p 阶子群均包含在 $Z(G)$ 中，则 G 为 p- 幂零群.

(2) 若群 G 的 2 阶元及 4 阶元均属于 $Z(G)$, 则 G 为 2- 幂零群.

引理 2.12[26,III,Theorem5.2] 设 G 是一个内 p- 幂零群，则

(1) G 的真子群为幂零群;

(2) $G = P \rtimes Q$, 其中 $P \in Syl_p(G)$, Q 为 G 的非正规循环 $Sylow\ q$- 子群 $(p \neq q)$;

(3) $P/\Phi(P)$ 为 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群;

(4) 若 $p = 2$, 则 $expP \leqslant 4$; 若 $p > 2$, 则 $expP = p$;

(5) 当 P 交换时， $expP = p$;

(6)$\Phi(P)\times\Phi(Q)=\Phi(G)=Z(G)$.

引理 2.13[1,IX,Theorem3.3] 若 $P\in Syl_p(G), N\trianglelefteq G$, 满足 $N\bigcap P\leq\Phi(P)$, 则 N 为 p-幂零群.

引理 2.14[31] 设 G 是内超可解群，则

(1) $G=P\rtimes M$, 其中 $P\in Syl_p(G)$, M 为超可解群;

(2) $P/\Phi(P)$ 为 $G/\Phi(G)$ 的极小正规子群;

(3) 若 $p=2$, 则 $expP\leqslant 4$; 若 $p>2$, 则 $expP=p$;

(4) 当 P 交换时， $\Phi(P)=1$; 当 P 非交换时， $\Phi(P)=Z(P)=P'$;

(5) 存在 $x\in P-\Phi(P)$, 使得 $\langle x\rangle\ntrianglelefteq G$;

(6) $P/\Phi(P)$ 非循环.

引理 2.15[20] 设 P 为 G 的正规 p- 群，则 $P\leq Z_\infty(G)$ 当且仅当 $O^p(G)\leq C_G(P)$.

引理 2.16[32,Lemma2.6] 设 $N\trianglelefteq G$, 且 $N\bigcap\Phi(G)=1$, 则 $F(N)$ 可以写成包含于 $F(N)$ 的 G 的极小正规子群的直积.

引理 2.17[33,Theorem6.3.5] 设 G 是 π- 可分群， $p\in\pi, q\in\pi'$, 则 G 中存在 S_σ 子群，其中 $\sigma=\pi,\sigma=\{\pi,q\},\sigma=\{p,q\}$.

引理 2.18[34,Theorem9.3.1] 设 G 是 π- 可分群，则 $C_G(O_{\pi'\pi}(G)/O_{\pi'}(G))\leq O_{\pi'\pi}(G)$.

引理 2.19[22,Theorem3.5] 设 $N\trianglelefteq G$ 且 G/N 为幂零群，若 $\mathscr{P}_4(N)$ 中每元在 G 中是弱 S- 可补的，则 G 为幂零群当且仅当 $\mathscr{P}(N)\subseteq Z_\infty(G)$.

引理 2.20[1,VII] (1) $G/O^p(G)$ 是 $p-$ 群;

(2) $H\trianglelefteq G$, 则 $O^p(G)\leq H$ 当且仅当 G/H 是 $p-$ 群.

引理 2.21[19] $\mathscr{F}$ 为饱和群系，则 $G/Z_{\mathscr{F}}(G)\in\mathscr{F}$ 当且仅当 $G\in\mathscr{F}$.

定理 2.22[1] 若 $p'-$ 群 H 平凡作用在 $p-$ 群 $G/\Phi(G)$ 上，则 H 也平凡地作用在 G 上.

定义 2.23[19] 设 $\mathscr{F}$ 是一个群类，如果满足

(1) 若 $G\in\mathscr{F}$ ， $H\trianglelefteq G$, 那么 $G/H\in\mathscr{F}$.

(2) 设 $M\trianglelefteq G, N\trianglelefteq G$, 如果 $G/M\in\mathscr{F}$, $G/N\in\mathscr{F}$, 那么 $G/M\bigcap N\in\mathscr{F}$.

则称 $\mathscr{F}$ 为一个群系.

定义 2.24[19] 称 G 的使得 $G/N \in \mathscr{F}$ 的最小正规子群为 G 的 $\mathscr{F}-$ 剩余，记为 $G^{\mathscr{F}}$. 事实上， $G^{\mathscr{F}} = \bigcap\{N \trianglelefteq G | G/N \in \mathscr{F}\}$.

定义 2.25[19] 设 $F(\mathscr{A})$ 为所有群系的集合，且 $f: P \to F(\mathscr{A})$ 为所有素数集合 P 到集合 $F(\mathscr{A})$ 的一个映射，这种映射就被称为一个群系函数.

定义 2.26[19] 设 f 为任一群系函数，群 G 的主因子 H/K 称为 f- 中心的，若任意 $p \in \pi(H/K)$, 有 $G/C_G(H/K) \in f(p)$.

定义 2.27[19] 对每个素数 p, 总有一个群系与之对应，记为 $f(p)$(可为空系), 若群类 $\mathscr{F}$ 由下述条件确定： $G \in \mathscr{F}$ 当且仅当 G 的每个主因子在 G 中是 f- 中心的，此时称 $\mathscr{F}$ 是由 $\{f(p)\}$ 局部定义的局部群系.

定义 2.28[19] 群系 $\mathscr{F}$ 称为饱和群系，若由 $G/\Phi(G) \in \mathscr{F}$, 得 $G \in \mathscr{F}$.

定义 2.29[19] 对于饱和群系 $\mathscr{F}$, 称 G 的主因子 H/K 在 G 中是 $\mathscr{F}-$ 中心的，若 H/K 在 G 中 f- 中心的；否则称 H/K 在 G 中是 $\mathscr{F}$- 非中心的.

定义 2.30[19] 称 G 的极大子群 M 在 G 中是 $\mathscr{F}$- 正规的，若 $G/M_G \in \mathscr{F}$; 否则称 M 在 G 中是 $\mathscr{F}$- 伪正规的.

定义 2.31[19] 称 M 为 G 的 $\mathscr{F}$- 临界极大子群，若 M 在 G 中是 $\mathscr{F}$- 伪正规的，且 $G = \widehat{F(G)}M$, 这里 $\widehat{F(G)}/\Phi(G) = Soc(G/\Phi(G))$.

定理 2.32[9] G 不属于 $\mathscr{F}$ 当且仅当存在 G 的 $\mathscr{F}$- 临界极大子群 M.

定义 2.33[19] 对于饱和群系 $\mathscr{F}$,$N \trianglelefteq G$, 称 N 在 G 中是 $\mathscr{F}-$ 超中心的，若存在正规链 $1 = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq N_r = N$, 满足 N_{i+1}/N_i 是 G 的 $\mathscr{F}$- 中心主因子， G 的所有 $\mathscr{F}-$ 超中心正规子群的乘积仍为 G 的 $\mathscr{F}$- 超中心，记为 $Z_{\mathscr{F}}(G)$, 称为 G 的 $\mathscr{F}$- 超中心.

定理 2.34[20] $G \in \mathscr{F}$ 当且仅当 $Z_{\mathscr{F}}(G) = G$.

注：局部群系和饱和群系是一致的.

对于饱和群系 $\mathscr{N}$, 人们习惯用 $K_\infty(G)$ 表示 $G^{\mathscr{N}}$, 用 $Z_\infty(G)$ 表示 $Z_{\mathscr{N}}(G)$. 更多关于群系的内容可以参考文献 [9][19][20].

第三章　主要结果

本章中，称 x 在 G 中是弱 S 可补的，即 $\langle x\rangle$ 在 G 中是弱 S- 可补子群.

定理 3.1 若 $p \in \pi(G)$,$(|G|, p-1) = 1$,$G_p \in Syl_p(G)$, 则 G 为 p- 幂零群当且仅当 $G_p \cap G^{\mathscr{N}_p}$ 中的每个 p 阶元和 4 阶元在 G 中是弱 S- 可补的.

证明 必要性：

已知 G 为 p- 幂零群，则 $G^{\mathscr{N}_p}$=1, 结论成立.

充分性：令 G 是极小阶反例.

(1) G 是内 p- 幂零群.

任意的 $M < G$, 令 $M_p \in Syl_p(M)$, 考虑 $(M_p \bigcap M^{\mathscr{N}_p}, M)$

事实上,

$$M/G^{\mathscr{N}_p} \cap M \cong MG^{\mathscr{N}_p}/G^{\mathscr{N}_p} \leq G/G^{\mathscr{N}_p} \text{ 为 } p\text{- 幂零群.}$$

则
$$M^{\mathscr{N}_p} \leq G^{\mathscr{N}_p} \cap M \leq G^{\mathscr{N}_p}.$$

不失一般性，可设 $M_p \leq G_p$,

则
$$M_p \cap M^{\mathscr{N}_p} \leq G_p \cap G^{\mathscr{N}_p}$$

所以

$$\mathscr{P}_p(M_p \cap M^{\mathscr{N}_p}) \subseteq \mathscr{P}_p(G_p \cap G^{\mathscr{N}_p}),$$

$$\mathscr{P}_4(M_p \cap M^{\mathscr{N}_p}) \subseteq \mathscr{P}_4(G_p \cap G^{\mathscr{N}_p}).$$

根据引理 2.2$(M_p \cap M^{\mathscr{N}_p}, M)$ 满足定理假设，则 M 为 p- 幂零群.

所以 G 为内 p- 幂零群，根据引理 2.12 可得

(i)$G = G_p \rtimes G_q$,$G_q \in Syl_q(G)$ 且 G_q 循环;

(ii)$G_p/\Phi(G_p)$ 是 $G/\Phi(G_p)$ 的极小正规子群;

(iii)$p > 2, expG_p = p; p = 2, expG_p$=2 或 4.

(2)$G^{\mathscr{N}_p} = G_p$.

因为 $G = G_p \rtimes G_q$, 所以 $G/G_p \cong G_q$ 为 p- 幂零群，因而 $G^{\mathscr{N}_p} \leq G_p$.

因 $G^{\mathscr{N}_p}\Phi(G_p)/\Phi(G_p) \trianglelefteq G/\Phi(G_p)$ 且 $G^{\mathscr{N}_p}\Phi(G_p)/\Phi(G_p) \leq G_p/\Phi(G_p)$,

根据引理 2.12(3) 可得

$$G^{\mathscr{N}_p}\Phi(G_p)/\Phi(G_p)=\bar{1} \text{ 或 } G^{\mathscr{N}_p}\Phi(G_p)/\Phi(G_p) = G_p/\Phi(G_p),$$

则　$G^{\mathscr{N}_p} \leq \Phi(G_p)$ 或 $G^{\mathscr{N}_p}\Phi(G_p) = G_p$ 即 $G^{\mathscr{N}_p} = G_p$.

若 $G^{\mathscr{N}_p} \leq \Phi(G_p)$, 因 $G/G^{\mathscr{N}_p}$ 为 p- 幂零群，则 $G/\Phi(G_p)$ 为 p- 幂零群.